Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Євгеньєва Євгенія Олександрівна

УДК 517.956.4

ГРАНИЧНІ РЕЖИМИ ІЗ СИНГУЛЯРНИМ ЗАГОСТРЕННЯМ У КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯННЯХ

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки Національної академії наук України, м. Слов'янськ.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Шишков Андрій Євгенович,
Інститут прикладної математики і механіки
НАН України (м. Слов'янськ),
провідний науковий співробітник
відділу нелінійного аналізу
та рівнянь математичної фізики.

Офіційні опоненти: академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Хруслов Євген Якович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б.І. Вєркіна НАН України (м. Харків),
завідувач відділу диференціальних рівнянь
і геометрії;

доктор фізико-математичних наук, професор
Бокало Микола Михайлович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка МОН України,
професор кафедри диференціальних рівнянь.

Захист дисертації відбудеться 20 грудня 2019 р. о 15-20 на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4, ауд. 6-49.

З дисертацією можна ознайомитися у Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий «   »   2019 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради   С.Ю. Ігнатович

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У 1960-х роках почався бурхливий розвиток теорії сингулярних граничних режимів разом із розвитком теорії сильно нестаціонарних та нелінійних проблем контрольованого термоядерного синтезу. Перша математична модель цього процесу була представлена та вивчена у роботі О.А. Самарського та І.М. Соболя[1] у 1963 році. Умови на межі області задачі були сингулярними, тобто розв'язок на межі мав прямувати до нескінченості при наближенні до деякого часу $T < \infty$. Було виявлено цікавий ефект просторової локалізації, коли нескінченість локалізується у фіксованій області біля межі і не поширюється глибоко всередину області задачі.

Усі дослідження минулого сторіччя були присвячені знаходженню умов на граничний режим, при яких має місце локалізація розв'язків лінійних та квазілінійних рівнянь другого порядку в одномірних та багатомірних областях, а також вивченню поведінки розв'язків таких задач. Найбільш вагомі результати були отримані В.О. Галактіоновим, М.В. Змітренко, С.П. Курдюмовим, О.П. Михайловим, О.А. Самарським, А.С. Калашніковим, B.H. Gilding, M.A. Herrero, C. Cortazar, M. Elgueta та багатьма іншими. Усі дослідження проводились бар'єрною технікою (методом порівняння). Цей підхід полягає у порівнянні розв'язків задачі з автомодельними розв'язками задачі з модельними граничними даними. Багато труднощів виникало, коли задача не мала автомодельних розв'язків і необхідно було знаходити інші шляхи дослідження, наприклад, метод пошуку наближених автомодельних розв'язків. У будь-якому випадку цей метод є досить результативним, хоча і має багато обмежень та не є універсальним.

У 1999 році А.Є. Шишковим та А.Г. Щелковим[2] був запропонований новий метод дослідження сингулярних граничних режимів. Метод енергетичних оцінок використовує принципово інший підхід, що полягає у ефективній оцінці перетоків енергії у нескінченій послідовності часових шарів, які накопичуються біля часу загострення, і не використовує бар'єрних технік. Він є комбінацією декількох методів та підходів. А саме, використовує метод апріорних оцінок типу Сен-Венана та нелінійний варіант цього методу, а також метод локальних енергетичних оцінок.

Пізніше у серії робіт В.О. Галактіонова та А.Є. Шишкова (2003–2006) метод енергетичних оцінок був розвинутий для широкого класу двічі нелінійних параболічних рівнянь другого порядку та розширений для дослідження рівнянь високих порядків. У монографії[3] зібрані усі основні принципи та результати, отримані ме-

---

[1]Самарский А.А., Соболь И.М. Примеры численного расчета температурных волн. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1963. Т. 3, № 4. С. 702–719.

[2]Шишков А.Е., Щелков А.Г. Граничные режимы с обострением для общих квазилинейных параболических уравнений в многомерных областях. *Матем. сб.* 1999. Т. 190, № 3. С. 447–479.

[3]Kovalevsky A.A., Skrypnik I.I., Shishkov A.E. Singular Solutions in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations. *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 24, De Gruyter, Basel*, 2016. 435 p.

тодом енергетичних оцінок, а саме для широкого класу рівнянь отримано точні умови локалізації граничних режимів.

Дисертаційна робота присвячена розвиненню метода енергетичних оцінок для дослідження поведінки розв'язків біля області сингулярності. Основною метою було отримати точні оцінки розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь для різних класів граничних режимів, дослідити залежність поведінки розв'язку від характеру загострення на межі. При цьому, цікавим та дуже важливим наслідком отриманих оцінок стала можливість дослідження рівнянь з потенціалом абсорбції та великих розв'язків таких рівнянь, тобто таких, що приймають нескінчені значення на всій параболічній області задачі.

Великі розв'язки є актуальним об'єктом дослідження та активно вивчаються в останні роки. Питання існування та поведінки великих розв'язків лінійних та напівлінійних рівнянь досліджується багатьма відомими вченими зі всього світу, а саме L. Veron[4], W. Al Sayed[5], M. Marcus[6], А.Є. Шишков[7], C. Bandle, G. Diaz, J.I. Diaz[8], Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik[9] та інші.

В дисертаційній роботі досліджуються двічі нелінійні рівняння з виродженим потенціалом абсорбції. Основною метою в цьому напрямку було дослідження поведінки слабких розв'язків описаних рівнянь та отримання оцінок зверху для них в залежності від характеру виродження потенціалу абсорбції. Такі результати є безумовно актуальними, оскільки вони розширюють існуючі результати на більш широкий клас рівнянь.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано у відділі нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики та механіки НАН України у відповідності до тематики пріоритетних досліджень відділу та в рамках державних науково-дослідних робіт:

1. НДР «Спектральні та якісні властивості еліптичних та параболічних граничних задач та їх розв'язків», відомча тематика НАН України, номер державної реєстрації: 0116U002032, термін виконання: 2016-2020 роки.

[4]Veron L. A note on maximal solutions of nonlinear parabolic equations with bsorption. *Asymptot. Anal.* 2011, Vol. 72. P. 189–200.

[5]Al Sayed W., Veron L. On uniqueness of large solutions of nonlinear parabolic equations in nonsmooth domains. *Adv. Nonlinear Stud.* 2009. Vol. 9. P. 149–164.

[6]Marcus M., Shishkov A.E. Propagation of strong singularities in semilinear parabolic equations with degenerate absorption. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* 2016. Vol. XVI, № 5, P. 1019–1047.

[7]Shishkov A. Large solutions of parabolic logistic equation with spatial and temporal degeneracies. *DCDS, ser.S.* 2017. Vol. 10, № 10. P. 895–907.

[8]Bandle C., Diaz G., Diaz J.I. Solutions d'equations de reaction-diffusion non lineaires explosant au bord parabolique. *C. R. Acad. Sci. Paris S'er. I Math.* 1994. Vol. 318, P. 455–460.

[9]Du Y., Peng R., Polaĉik P. The parabolic logistic equation with blow-up initial and boundary values. *Journal D'Analyse Mathematique.* 2012. Vol. 118. P. 297–316.

2. НДР «Регулярність та точні поточкові оцінки сингулярних розв'язків квазілінійних еліптичних та параболічних рівнянь структури дифузії-сильної нелінійної абсорбції», що фінансувалась Державним фондом фундаментальних досліджень згідно договорів:

   № Ф71/66-2016 від 12.07.2016 р., номер державної реєстрації: 0116U007160, термін виконання: липень – грудень 2016 року,

   № Ф71/42-2017 від 11.05.2017 р., номер державної реєстрації: 0117U006053, термін виконання: травень – жовтень 2017 року.

3. НДР «Геометричні властивості метричних просторів, динамічних систем та особливості параболічних рівнянь», що фінансувалась Державною організацією «Відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при Національній академії наук України» згідно протоколу № 28 від 16.05.2017 р.,

   номер державної реєстрації: 0117U006353, термін виконання: липень - грудень 2017 року,

   номер державної реєстрації: 0118U003795, термін виконання: січень - грудень 2018 року.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є отримання точних оцінок розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь для різних класів сингулярних граничних режимів, дослідження залежності поведінки розв'язку від характеру загострення на межі; дослідження поведінки великих розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь з виродженим потенціалом абсорбції, отримання точних оцінок для них в залежності від характеру виродження потенціалу абсорбції.

Завдання дослідження:

– розвинути метод енергетичних оцінок для дослідження поведінки слабких розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь;

– знайти точну оцінку профілю слабких розв'язків початково-крайової задачі квазілінійного параболічного рівняння з локалізованими сингулярними граничними даними;

– дослідити залежність отриманих оцінок від характеру загострення граничного режиму;

– знайти точну оцінку профілю слабких розв'язків квазілінійного параболічного рівняння з виродженим потенціалом абсорбції з довільними граничними та початковими даними;

– дослідити залежність отриманих оцінок від характеру виродження потенціалу абсорбції;

– дослідити різні випадки співвідношень між параметрами нелінійностей двічі нелінійного параболічного рівняння;

– порівняти отримані оцінки з існуючими оцінками розв'язків лінійних та напівлінійних рівнянь.

Об'єкт дослідження — квазілінійні параболічні рівняння з сингулярними граничними даними, квазілінійні параболічні рівняння з виродженим потенціалом абсорбції.

Предмет дослідження — слабкі розв'язки початково-крайової задачі квазілінійного параболічного рівняння з локалізованими сингулярними граничними даними, слабкі та великі розв'язки квазілінійного параболічного рівняння з виродженим потенціалом абсорбції.

Методи дослідження. Для отримання результатів дисертаційної роботи використовується метод енергетичних оцінок, описаний у серії робіт В.А. Галактіонова та А.Є. Шишкова (2003–2006). Він є комбінацією декількох підходів та технік. А саме, використовує метод апріорних оцінок типу Сен-Венана, які застосовуються при вивченні існування, єдиності та асимптотичних властивостей енергетичних слабких розв'язків лінійних еліптичних та параболічних рівнянь, а також нелінійний варіант цього методу; метод локальних енергетичних оцінок.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі досліджено поведінку слабких розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь з локалізованими сингулярними граничними даними, а також поведінку слабких та великих розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь з виродженим потенціалом абсорбції. Зокрема, отримані такі результати:

– методом енергетичних оцінок знайдено точну оцінку профілю слабких розв'язків початково-крайової задачі квазілінійного параболічного рівняння з локалізованими сингулярними граничними даними в залежності від характеру загострення граничного режиму;

– на основі отриманих оцінок знайдено точну оцінку зверху профілю слабких розв'язків квазілінійного параболічного рівняння з виродженим потенціалом абсорбції з довільними граничними та початковими даними;

– усі оцінки отримано для різних випадків співвідношень між параметрами нелінійностей розглянутих рівнянь.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер та все ж отримані результати можуть бути застосовані при вивченні сильно нестаціонарних фізичних процесів, для яких характерне явище локалізації тепла, магнітного поля та інших величин на визначених ділянках середи. Також важливим аспектом є метод, за допомогою якого проведено дослідження. Метод енергетичних оцінок може застосовуватись при вивченні нелінійних рівнянь у частинних похідних другого та високих порядків у багатомірних областях з сингулярними граничними даними, а також при вивченні великих розв'язків параболічних рівнянь з абсорбцією та логістичних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівникові. Усі результати дисертації отримані авторкою самостійно. Зі статтей, які опубліковані у співавторстві, у дисертацію включені лише ті результати, які належать здобвачу. А саме, роботи [1], [2] і [4] написані без співавторів. Роботи [3] та [5] написані у співавторстві з науковим керівником. У роботі [3] автору належить Теорема 1.1, Наслідок 2.1. У роботі [5] особистий внесок здобувача - це Theorem 1.2, Theorem 1.3, Corollary 1.4, Lemma 2.3, Lemma 5.2, Example 5.3, Example 5.4. Результати, що належать співавторам та іншим математикам, згадуються за необхідністю для повноти викладу та супроводжуються відповідними посиланнями.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації були представлені на конференціях всеукраїнського та міжнародного рівнів: Міжнародна конференція з диференціальних рівнянь, присвячена 110-річниці від дня народження Я.Б. Лопатинського (Львів, 2016); V Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б. Лопатинського (Київ, 2016); Міжнародна конференція з диференціальних рівнянь, математичної фізики та застосувань (Черкаси, 2017); Міжнародна літня математична школа пам'яті В.А. Плотнікова (Одеса, 2018); Summer School Wisla 18 (Вісла, Польща, 2018); Міжнародна наукова конференція, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях"(Чернівці, 2018); VI Всеукраїнська математична конференція імені Б.В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу"(Микуличин, 2018); Наукова конференція, присвячена 80-річчю Б.В. Базалія та сторіччю Національної академії наук України "Contemporary Analysis and Nonlinear Boundary Problems"(Слов'янськ, 2018); Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2019» (Львів, 2019); Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 2019); Міжнародна конференція до 100-річчя О.В. Погорєлова "Geometry, Differential Equations and Analysis"(Kharkiv, 2019); VI Міжнародна школа-конференція імені Я.Б. Лопатинського "Диференціальні рівняння та їх застосування"(Вінниця, 2019); Міжнародна конференція «Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV», присвячена 100-річчю з дня народження В.К. Дзядика (Світязь, 2019).

Також результати дисертаційного дослідження доповідались на семінарах: розширений семінар відділення математики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України (Харків, 2019); розширений семінар відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України (Слов'янськ, 2019).

Публікації. Всі основні результати роботи в повній мірі опубліковані у фахових журналах та міжнародних наукових виданнях з наукометричних баз, пройшли апробацію на наукових конференціях та семінарах. Результати дисертації знайшли відображення у 16 наукових публікаціях, в тому числі у 5 статтях у фахових наукових журналах України та міжнародних виданнях, що входять до наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, три з яких написано без співавторів, і в тезах доповідей на 11 наукових конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, трьох розділів, висновків до дисертації, списку використаних джерел, який містить 93 найменування, та 1 додатку. Повний обсяг роботи – 156 сторінок. Обсяг основної частини дисертації – 117 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 22 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджуваної задачі, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури, описано історію проблематики та наведено ключові результати, отримані в області дослідження за останній час.

Початок активного розвитку теорії сингулярних граничних режимів припадає на 1960-ті роки. Однією з актуальних проблем тоді стало дослідження процесу контрольованого термоядерного синтезу. Як відомо, термоядерна реакція запускається за надвисоких температур, тому при побудові математичної моделі цього процесу ключовим аспектом були граничні умови з сингулярним загостренням. Вперше таку задачу вивчили О.А. Самарський та І.М. Соболь у 1963 році. Вони показали, що за певних умов на характер загострення температури на границі виникає ефект просторової локалізації, тобто, нескінчена температура не розповсюджується на всю область за скінчений проміжок часу, а локалізується біля її границі.

У 1970-х роках модель розповсюдження тепла у повністю іонізованій плазмі та ефект просторової локалізації дуже активно вивчалися В.О. Галактіоновим, М.В. Змітренко, С.П. Курдюмовим, О.П. Михайловим, О.А. Самарським, А.С. Калашніковим та іншими. Серед основних результатів тих часів можна виділити знаходження умов локалізації граничних режимів для параболічного рівняння зі степеневим коефіцієнтом теплопровідності, а також ряд важливих чисельних результатів для глибшого розуміння процесу контрольованого термоядерного синтезу.

З 1980-х років задачі з сингулярними умовами на границю почали позиціонуватись як окремий напрямок досліджень якісних властивостей рівнянь з частинними похідними. Такі задачі насамперед пов'язувались з особливостями сильно нестаціонарних процесів, для яких характерне явище локалізації тепла, магнітного поля та інших величин на визначених ділянках середи. Основні результати, пов'язані зі знаходженням необхідних та достатніх умов локалізації граничного режиму для параболічних рівнянь з різними класами коефіцієнтів теплопровідності, були отримані В.О. Галактіоновим, О.А. Самарським, С.П. Курдюмовим, О.П. Михайловим[10], B.H. Gilding, M.A. Herrero[11], C. Cortazar, M. Elgueta[12].

Активно розвивається та модифікується бар'єрна техніка (метод порівняння). Цей підхід полягає у порівнянні розв'язків задачі з автомодельними розв'язками задачі з модельними граничними даними. Багато труднощів виникало, коли задача не мала автомодельних розв'язків і необхідно було знаходити інші шляхи дослідження, наприклад, метод пошуку наближених автомодельних розв'язків. У будь-якому випадку, цей метод є досить результативним, хоча і має багато обмежень та не є універсальним.

У 1999 році А.Є. Шишковим та А.Г. Щелковим був запропонований новий метод дослідження сингулярних граничних режимів. Метод енергетичних оцінок використовує принципово інший підхід, відмінний від бар'єрних технік. Він полягає у ефективній оцінці перетоків енергії у нескінченій послідовності часових шарів, які накопичуються біля часу загострення, і не використовує бар'єрних технік. Він є комбінацією декількох методів та підходів. А саме, використовує метод апріорних оцінок типу Сен-Венана та нелінійний варіант цього методу, а також метод локальних енергетичних оцінок. Пізніше у серії робіт В.О. Галактіонова

[10] Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация тепла в нелинейных средах. *Дифференц. уравнения.* 1981. Т. 17, № 10. С. 1826—1841.

[11] Gilding B.H., Herrero M.A. Localization and blow-up of thermal waves in nonlinear heat conduction with peaking. *Math. Ann.* 1988. Vol. 282, № 2. P. 223—242.

[12] Cortazar C., Elgueta M. Localization and boundedness of the solutions of the Neumann problem for a filtration equation. *Nonlinear Anal.* 1989. Vol. 13, No 1. P. 33—41.

та А.Є. Шишкова[13] [14] [15] [16] він був розвинутий для широкого класу двічі нелінійних параболічних рівнянь другого порядку та розширений для дослідження рівнянь високих порядків. У цих роботах знайдено точні умови локалізації граничних режимів для квазілінійних параболічних рівнянь другого порядку з двома нелінійностями.

Однак, у вищезгаданих роботах метод енергетичних оцінок дозволяв знайти лише умови локалізації граничного режиму і не давав містких результатів про поведінку розв'язку біля зони сингулярності. Тому основною метою роботи стала модифікація методу для дослідження поведінки розв'язків широкого класу рівнянь. Такі дослідження розширюють вже відомі класичні результати та показують ефективність нового методу дослідження локалізованих граничних режимів із сингулярним загостренням.

Отже, під час огляду літератури було визначено актуальні напрямки досліджень та важливі відкриті проблеми у цій галузі, сформульовано мету роботи.

Другий розділ присвячений вивченню задачі:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p u = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u_0 \in L^{q+1}(\Omega), \tag{2}$$

де $1 \leqslant T < \infty$, Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ з гладкою межею $\partial\Omega \in C^2$, Δ_p — p-лапласіан, що визначається співвідношенням:

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{n} \left(|\nabla_x u|^{p-1} u_{x_i}\right)_{x_i}.$$

Параметри нелінійності p та q задовольняють умову: $p \geqslant q > 0$.

Визначення 2.7. Функція $u \in C_{loc}([0,T); L^{q+1}_{loc}(\Omega))$ називається **слабким (енергетичним) розв'язком** задачі (1), (2), якщо

i) $u(t,\cdot) \in L^{p+1}_{loc}([0,T); W^{1,p+1}_{loc}(\Omega))$;

ii) $(|u(t,\cdot)|^{q-1}u(t,\cdot))_t \in L^{\frac{p+1}{p}}_{loc}([0,T); (\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))^*)$;

[13] Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Saint-Venant's principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A.* 2003. Vol. 133 , № 5. P. 1075–1119.

[14] Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations. *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci.* 2004. Vol. 460. P. 3299–3325.

[15] Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Self-similar boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* 2005. Vol. 135A. P. 1195–1227.

[16] Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Higher-order quasilinear parabolic equations with singular initial data. *Communications in Contemp. Math.* 2006. Vol. 8, № 3. P. 331–354.

iii) виконується інтегральна тотожність:

$$\int_0^\tau \langle (|u|^{q-1}u)_t, \eta \rangle dt + \int_0^\tau \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla u)\eta_{x_i} dxdt = 0$$

для довільної функції $\eta \in L^{p+1}((0,\tau); \overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))$ з довільним $\tau < T$;

iv) виконано початкову умову (2).

Будемо розглядати множину $U_{u_0,F}$ як клас усіх слабких розв'язків u задачі, які задовольняють енергетичній умові:

$$h(t) + E(t) = h_u(t) + E_u(t) :=$$
$$:= \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |u(\tau,x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau \leqslant F(t) \quad \forall\, t \in (0,T),$$

де $F(t) > 0$ — довільна монотонно неспадна на інтервалі $[0,T)$ функція, така, що

$$F(t) \to \infty \text{ при } t \to T.$$

Функції E_u, h_u називаються енергетичними функціями для розв'язку u.

Слід зазначити, що клас $U_{u_0,F}$ зокрема містить у собі розв'язки задачі (1), (2) з граничною умовою Діріхле, що загострюється у момент часу $t = T$:

$$u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = f(t,x) \to \infty \text{ при } t \to T.$$

У **підрозділах 2.1 та 2.2** описана постановка задачі для введеного квазілінійного параболічного рівняння (1), представлено означення слабкого розв'язку та наведено допоміжні результати. Зокрема, визначені важливі для дослідження параметризовані енергетичні функції, які пов'язані з розв'язком u та визначають його поведінку в залежності від відстані до межі області:

$$E(t,s) := \int_0^t \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau,$$
$$h(t,s) := \sup_{0 \leqslant \tau < t} \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{q+1} dx \qquad \forall\, s \in (0, s_\Omega),\, \forall\, t \in (0,T).$$

де сімейство підобластей $\Omega(s) \subset \Omega$ визначається таким чином:

$$\Omega(s) := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > s\}, \quad s > 0.$$

У **підрозділі 2.3** досліджуються розв'язки рівняння (1) з класу $U_{u_0,F}$ за умови на пареметри нелінійності $p = q$. Розглядається випадок, коли енергетичні функції загострюються експоненціально. Основним результатом цього підрозділу є теорема.

Теорема 2.5. Нехай u — довільний слабкий розв'язок рівняння із класу $U_{u_0,F}$ з функцією F, визначеною таким чином:

$$F(t) = F_\mu(t) := \exp\left(\omega(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall t < T, \tag{3}$$

де $\omega_0 > 0$, $\mu > 0$ — деякі сталі. Тоді існують константи $c_1 < \infty$, $c_2 < \infty$, $c_3 < \infty$, що залежать лише від відомих параметрів задачі, такі, що виконується рівномірна відповідно до $t < T$ апріорна оцінка:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant c_1 \exp\left(c_2 \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} s^{-\frac{p+1}{\mu}}\right) \;\; \forall\, s : 0 < s < s_0' := c_3 \min\left(1, \omega^{\frac{p+\mu}{p+1}}\right). \tag{4}$$

Характер загострення розв'язку на границі, описаний функцією F у (3), є дуже близьким до критичного при $\mu \to 0$. Відомо, що при $\mu = 0$ розв'язок має зону сингулярності ненульової міри біля границі. Цікаво, що яким би малим не був параметр збурення μ, зона сингулярності вироджується і не виходить за межі границі області, що підтверджує отримана оцінка (4). Ця оцінка дозволяє також прослідкувати залежність поведінки розв'язку від параметру μ. Легко бачити, що розв'язок стає більш пологим зі збільшенням μ та "вибухає" при $\mu \to 0$.

У **підрозділі 2.4** також досліджуються розв'язки задачі з класу $U_{u_0,F}$ за умови $p = q$, але поведінка розв'язку на границі визначається пологим степеневим режимом. Основним результатом цього підрозділу є теорема.

Теорема 2.6. Нехай u — довільний енергетичний розв'язок з класу $U_{u_0,F}$ з функцією F:

$$F(t) = F_\alpha(t) := \omega_0 (T-t)^{-\alpha} \quad \forall\, t < T,$$

де $\omega_0 > 0$, $\alpha > \frac{1}{p+1}$ — деякі сталі. Тоді існує стала $G < \infty$, що залежить лише від відомих параметрів задачі, і значення $\hat{s} > 0$ таке, що виконується рівномірна апріорна оцінка:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant G \omega_0 s^{-\alpha(p+1)} \quad \forall\, t < T, \forall\, s \in (0, \hat{s}).$$

Така степенева поведінка є дуже пологою для розглянутого рівняння та гарантує локалізацію зони сингулярності на границі області. Отримана оцінка дає нову інформацію про поведінку розв'язків двічі нелінійних рівнянь. Більш того, цей результат використано у третьому розділі для розширення вже відомого результату[17] на нелінійний випадок.

[17] Du Y., Peng R., Polaĉik P. The parabolic logistic equation with blow-up initial and boundary values. *Journal D'Analyse Mathematique.* 2012. Vol. 118. P. 297–316.

У **підрозділі 2.5** розглядаються розв'язки задачі із класу $U_{u_0,F}$ у випадку, коли $p > q$, а поведінка на границі описується степеневою функцією. Основним результатом цього підрозділу є теорема.

Теорема 2.7. Нехай u — довільний енергетичний розв'язок рівняння (1) з множини $U_{u_0,F}$, де F визначається співвідношенням:

$$F(t) = F_\beta := \omega_0 (T-t)^{-\left(\frac{q+1}{p-q}-\beta\right)} \quad \forall\, t < T, \quad \omega_0 > 0,\ 0 < \beta < \beta_0 = \frac{q+1}{p-q} - \frac{1}{p}.$$

Тоді існує стала $G > 0$ і значення $\hat{s} > 0$, що залежать лише від відомих параметрів задачі, такі, що для розв'язку u справедлива рівномірна за $t \leqslant T$ енергетична оцінка:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant G\omega_0^{\frac{q+1}{\beta(p-q)}} s^{-\nu} \qquad \forall\, t \leqslant T,\ \forall\, s \in (0,\hat{s}),$$

де $\nu = \frac{(n(p-q)+(q+1)(p+1))(q+1-\beta(p-q))}{\beta(p-q)^2}$.

Характер загострення розв'язку на границі, описаний функцією F, є близьким до критичного при $\beta \to 0$. Відомо, що при $\beta = 0$ розв'язок має зону сингулярності ненульової міри біля границі. Аналогічно до вищезгаданих результатів, оцінка дозволяє прослідкувати залежність поведінки розв'язку від параметру збурення β.

У **третьому розділі** вивчаються квазілінійні рівняння з потенціалом абсорбції:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p(u) = -b(t,x)|u|^{\lambda-1}u, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \quad \lambda > p \geqslant q > 0. \tag{5}$$

Потенціал абсорбції b є неперервною в області $[0,T]\times\overline{\Omega}$ функцією та задовольняє таким умовам виродження:

$$\begin{aligned} &b(t,x) > 0 \quad \text{в } [0,T)\times\overline{\Omega}, \\ &b(t,x) = 0 \quad \text{на } \{T\}\times\Omega. \end{aligned} \tag{6}$$

У представленому розділі вивчається поведінка слабких розв'язків приведеного рівняння.

Визначення 3.8. Функція $u \in C_{loc}((0,T); L^{q+1}_{loc}(\Omega))$ називається **слабким розв'язком** рівняння (5), якщо:

$$u \in L^{p+1}_{loc}\left((0,T); W^{1,p+1}_{loc}(\Omega)\right) \cap L^{\lambda+1}_{loc}\left((0,T)\times\Omega\right),$$
$$(|u|^{q-1}u)_t \in L^{\frac{p+1}{p}}_{loc}\left((0,T); (W^{1,p+1}_c(\Omega))^*\right) + L^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}_{loc}\left((0,T); (L^{\lambda+1}_c(\Omega))^*\right)$$

і виконується інтегральна тотожність:

$$\int_a^b \langle (|u|^{q-1}u)_t, \eta\rangle dt \; + \; \int_a^b \int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla u)\eta_{x_i} \; + \; b(t,x)|u|^{\lambda-1}u\eta \Big] dxdt \;\; = \;\; 0$$

для довільних $0 < a < b < T$ та довільної функції

$$\eta \in L^{p+1}_{loc}\left((0,T); W^{1,p+1}_c(\Omega)\right) \cap L^{\lambda+1}_{loc}\left((0,T); L^{\lambda+1}_c(\Omega)\right),$$

де $W^{1,p+1}_c(\Omega)$, $L^{\lambda+1}_c(\Omega)$ є підпросторами $W^{1,p+1}(\Omega)$, $L^{\lambda+1}(\Omega)$ функцій з компактним носієм в Ω, а знаком $<,>$ позначається операція парування елементів з просторів $W^{1,p+1}_c(\Omega) \cap L^{\lambda+1}_c(\Omega)$ і $\left(W^{1,p+1}_c(\Omega) \cap L^{\lambda+1}_c(\Omega)\right)^*$.

Частковим випадком слабких розв'язків є, так звані, "великі" розв'язки, які представляють найбільший інтерес для вивчення.

Визначення 3.9. Функція u називається **великим розв'язком** рівняння (5), якщо вона є слабким розв'язком рівняння (5) та задовольняє нескінченим початковим та крайовим умовам, а саме:

$$u = \infty \text{ на } \{0\} \times \Omega, \text{ тобто } \lim_{t\to 0} u(t,x) = \infty \text{ рівномірно } \forall\, x \in \Omega,$$

$$u = \infty \text{ на } (0,T) \times \partial\Omega, \text{ тобто } \lim_{d(x,\partial\Omega)\to 0} u(t,x) = \infty \text{ рівномірно } \forall\, t \in (0,T),$$

У **підрозділі 3.1** представлено квазілінійне параболічне рівняння з виродженим потенціалом абсорбції, представлено основні напрями дослідження, описано результати щодо існування розв'язків аких рівнянь.

Рівняння типу (5) застосовуються при вивченні процесів росту біологічних популяцій, фільтрації газів у пористому середовищі із абсорбцією, нестаціонарних процесів у неньютонівській рідині.

Актуальним об'єктом вивчення при вивченні рівнянь з абсорбцією представляють великі розв'язки. Питання існування та поведінки великих розв'язків є актуальним напрямом досліджень та вивчається багатьма відомими вченими зі всього світу, а саме L. Veron, W. Al Sayed, M. Marcus, А.Є. Шишков, C. Bandle, G. Diaz, J.I. Diaz, Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik та інші. Зазвичай розглядаються лінійні ($p = q = 1$) або напівлінійні ($q = 1$) рівняння (5). Для загального випадку рівняння з двома нелінійностями ($p \neq 1$ та $q \neq 1$) існування великих розв'язків досі не доведено.

Один з цікавих результатів було отримано Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik[18]. У роботі доведено існування максимального та мінімального розв'язків описаного рівняння

[18]Du Y., Peng R., Polaĉik P. The parabolic logistic equation with blow-up initial and boundary values. *Journal D'Analyse Mathematique.* 2012. Vol. 118. P. 297–316.

(5) з нескінченими початковими та граничними умовами (див. Визначення 3.9). А також отримано оцінку великих розв'язків за умови степеневого характеру виродження потенціалу абсорбції. Цей результат було розширено на нелінійний випадок у підрозділі 3.4.

У **підрозділі 3.2** дано чітке формулювання задачі, представлено визначення слабкого розв'язку. Також описано характер виродження потенціалу абсорбції, а саме:

$$a_1(t)g_1(d(x)) \le b(t,x) \le a_2(t)g_2(d(x)) \qquad \forall\,(t,x) \in [0,T) \times \Omega, \tag{7}$$

де $g_1(s) \le g_2(s)$ — довільні неспадні додатні функції, визначені для всіх $s > 0$.

Застосовуючи результати, отримані в розділі 2 за допомогою методу енергетичних оцінок, можна отримати оцінки слабких розв'язків вказаного рівняння. Суттєву роль при цьому відіграє поведінка міноранти a_1. Важливо відзначити, що усі результати у цьому розділі отримані для всіх слабких розв'язків відповідної задачі, незалежно від початкових та граничних умов. Тож за умови існування великих розв'язків, результати справедливі і для них.

У **підрозділі 3.3** досліджуються слабкі розв'язки рівняння за умови $p = q$. Спираючись на результат підрозділу 2.3 отримано оцінку поведінки таких розв'язків з експоненціальним характером виродження потенціалу абсорбції. Основним результатом цього підрозділу є представлена теорема.

Теорема 3.8. Нехай u — довільний слабкий розв'язок рівняння (5) і нехай потенціал абсорбції b задовольняє умовам виродження (6), (7). Покладемо, що характер виродження потенціалу абсорбції описується такою умовою на міноранту $a_1(t)$:

$$a_1(t) \ge \kappa^{-1} \exp\left(-\omega_0 (T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall\, t < T,\, \kappa > 0,\, \omega_0 > 0,\, \mu > 0, \tag{8}$$

Тоді для всіх $\frac{T}{2} < t < T$ справедлива енергетична оцінка:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant K_1 \min_{0<\bar{s}<s} \left\{ \exp\left(K_2 \omega_0^{\frac{p+\mu}{\mu}} (s-\bar{s})^{-\frac{p+1}{\mu}} \right) \cdot G_1(\bar{s}) \right\} \quad \forall\, s \in (0, s_0'),$$

$$G_1(s) = \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh \right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} \tag{9}$$

де сталі $K_1 < \infty$, $K_2 < \infty$ залежать тільки від відомих параметрів задачі, значення $s_0' > 0$ залежить від κ.

Для більш простого розуміння у роботі наведено приклад, що ілюструє отриманий результат для більш конкретного випадку виродження потенціалу абсорбції.

Приклад 3.2. Нехай $g_1(s) = as^\nu$, $a = const > 0$, $\nu = const \geq 0$, де g_1 — функція з (7).

Тоді $G_1(s) = a^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \left(1 + \frac{\nu(p+1)}{1+p(\lambda+2)}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} s^{-\frac{(\nu+1)(p+1)+p(\lambda+1)}{\lambda-p}}$. Тож оцінка (9) приводить до:

$$E(t,s) + h(t,s) \leq K_3 \exp\left(K_2(1-\rho)^{-\frac{p+1}{\mu}} \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}} s^{-\frac{p+1}{\mu}}\right) \rho^{-b} s^{-b}$$
$$\forall\, t \in \left(\frac{T}{2}, T\right),\ \forall\, s \in (0, s_0'),\ \text{де}\ \ b = \frac{(\nu+1)(p+1) + p(\lambda+1)}{\lambda - p},$$
$$K_3 = K_3(a,\nu) = K_1 a^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \left(1 + \frac{\nu(p+1)}{1+p(\lambda+2)}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}.$$

Тут $\rho = \rho\left(\frac{\mu b s^{\frac{p+1}{\mu}}}{K_2 \omega^{\frac{p+\mu}{\mu}}(p+1)}\right)$, де $\rho(\tau)$ — функція, що визначається умовами оптимізації. А саме, ця функція задовольняє рівняння:

$$\rho - \tau(1-\rho)^{\frac{p+\mu+1}{\mu}} = 0, \quad \forall \tau > 0.$$

Легко бачити, що $\rho(\cdot) : (0,\infty) \to (0,1)$ монотонно зростаюча функція. Більш того, $\rho(\tau)\tau^{-1} \to 1$ при $\tau \to 0$.

У **підрозділі 3.4** досліджуються слабкі розв'язки рівняння, що розглядається. Спираючись на результат підрозділу 2.4 можна отримати оцінку поведінки розв'язків, коли характер виродження потенціалу абсорбції є степеневим. Така оцінка для лінійного рівняння ($p = 1$) була отримана Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik. Тож, результати цього підрозділу є розширенням на нелінійний випадок та представлені у теоремі.

Теорема 3.9. Нехай u — довільний слабкий розв'язок рівняння (5) і нехай потенціал абсорбції b задовольняє умовам виродження (6), (7). Покладемо, що характер виродження потенціалу абсорбції описується умовою на міноранту $a_1(t)$:

$$a_1(t) \geqslant \kappa^{-1}(T-t)^\mu \quad \forall\, t < T,\ \kappa = const > 0,\ \mu > \frac{(p+2)(\lambda-p)}{(p+1)^2}.$$

Тоді для всіх $\frac{T}{2} < t < T$ має місце оцінка:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant K\,\kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}} \min_{0<\bar{s}<s} \left\{(s-\bar{s})^{-\theta} G_1(\bar{s})\right\} \qquad \forall\, s \in (0,\tilde{s}),$$
$$G_1(s) := \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh\right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}, \quad (10)$$

де $\theta = \frac{(p+1)(\mu(p+1)-(\lambda-p))}{\lambda-p}$, стала $K < \infty$ залежить тільки від відомих параметрів задачі, $\tilde{s} > 0$.

Також в кінці підрозділу 3.4 наведено приклад, в якому представлена енергетична оцінка для лінійного випадку.

Приклад 3.4. За умов $p = 1$ та $g_1(s) = s^\beta$ оцінка (10) приводить до енергетичної оцінки:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant \overline{K}\,\kappa^{\frac{2}{\lambda-1}} s^{-\frac{2(2\mu+\beta+2)-(\lambda-1)}{\lambda-1}} \quad \forall\, t \in \left(\frac{T}{2}, T\right), \forall\, s \in (0,\tilde{s}), \tag{11}$$

де $\overline{K} = const > 0$.

У **підрозділі 3.5** досліджуються слабкі розв'язки рівняння за умови на параметри нелінійності $p > q$ (рівняння повільної дифузії). Спираючись на результат підрозділу 2.5 можна отримати оцінку поведінки слабких розв'язків такого рівняння. Результати цього розділу представлені в теоремі.

Теорема 3.10. Нехай u — довільний слабкий розв'язок рівняння і нехай потенціал абсорбції b задовольняє умовам виродження. Характер виродження потенціалу абсорбції описується умовою на функцію a_1:

$$a_1(t) \geqslant \kappa^{-1}(T-t)^\mu \qquad \forall\, t < T, \quad \kappa = const > 0, \quad \frac{\lambda - p}{p} < \mu < \frac{\lambda - p}{p-q}.$$

Тоді для всіх $\frac{T}{2} < t < T$ виконується оцінка:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant K\,\kappa^{\frac{q+1}{\lambda-p-\mu(p-q)}} \min_{0<\bar{s}<s} \left\{ (s-\bar{s})^{-\theta} G_1(\bar{s}) \right\} \qquad \forall\, s \in (0,\tilde{s}),$$

$$G_1(s) := \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}} dh \right)^{-\frac{(q+1)(1+p(\lambda+2))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}}, \tag{12}$$

де $\theta = \frac{(n(p-q)+(q+1)(p+1))(\mu(p+1)-(\lambda-p))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}$, стала $K < \infty$ та значення $\tilde{s} > 0$ залежать тільки від відомих параметрів задачі.

Приклад 3.5. Нехай $g_1(s) = as^\varrho$, $a = const > 0$, $\varrho = const \geqslant 0$. Тоді

$$G_1(s) = a^{-\frac{q+1}{\lambda-p-\mu(p-q)}} \left(1 + \frac{\varrho(p+1)}{\lambda p + 2p + 1} \right)^{\frac{(q+1)(1+p(\lambda+2))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}} s^{-\eta}, \tag{13}$$

де $\eta = \eta(\varrho) = \frac{(q+1)((\varrho+1)(p+1)+p(\lambda+1))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}$. У цьому випадку оцінка (12) приводить до:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant \overline{K}\,\kappa^{\frac{q+1}{\lambda-p-\mu(p-q)}} s^{-(\theta+\eta)} \quad \forall\, t \in \left(\frac{T}{2}, T\right), \forall\, s \in (0,\tilde{s}), \tag{14}$$

де стала $\overline{K}$ визначається таким чином:

$$\overline{K} = \overline{K}(a, \varrho) = K_1 a^{-\frac{q+1}{\lambda - p - \mu(p-q)}} \left(1 + \frac{\varrho(p+1)}{\lambda p + 2p + 1)}\right)^{\frac{(q+1)(1+p(\lambda+2))}{(p+1)(\lambda-p-\mu(p-q))}} \frac{(\theta+\eta)^{\theta+\eta}}{\theta^{\theta}\eta^{\eta}},$$

де K_1, θ з (12), η з (13).

У **підрозділі 3.6** наведено твердження, що стосується точності отриманих оцінок. А саме, показано, що область сингулярності для рівняння з абсорбцією з'являється за умов на потенціал абсорбції, що відповідають умовам сингулярного загострення граничного режиму для однорідного рівняння теплопровідності.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвиненню метода енергетичних оцінок для дослідження поведінки розв'язків біля області сингулярності, який був запропонований та розроблений у роботах В.О. Галактіонова, А.Є. Шишкова та А.Г. Щелкова. За допомогою цього методу отримано точні оцінки розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь для різних класів граничних режимів, досліджено залежність поведінки розв'язку від характеру загострення на границі. При цьому, цікавим та дуже важливим наслідком отриманих оцінок стала можливість дослідження рівнянь з потенціалом абсорбції та великих розв'язків таких рівнянь, тобто таких, що приймають нескінчені значення на всій параболічній області задачі. У цьому напрямку було досліджено поведінку усіх слабких (у тому числі і великих) розв'язків двічі нелінійних рівнянь з виродженим потенціалом абсорбції та отримані точні оцінки для них в залежності від характеру виродження потенціалу абсорбції. Такі результати є безумовно актуальними, оскільки вони розширюють існуючі результати на більш широкий клас рівнянь. Вагомим результатом дослідження є удосконалення нового методу енергетичних оцінок, що дозволяє розглядати дуже широкий клас рівнянь з сингулярними та нескінченими граничними даними.

У дисертації отримано такі нові результати:

- розвинуто метод енергетичних оцінок для дослідження поведінки слабких розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь;

- знайдено точну оцінку профілю слабких розв'язків початково-крайової задачі квазілінійного параболічного рівняння з локалізованими сингулярними граничними даними;

- досліджено залежність знайдених оцінок від характеру загострення граничного режиму;

– знайдено точну оцінку профілю слабких розв'язків квазілінійного параболічного рівняння з виродженим потенціалом абсорбції з довільними граничними та початковими даними;

– досліджено залежність знайдених оцінок від характеру виродження потенціалу абсорбції;

– досліджено різні випадки співвідношень між параметрами нелінійностей двічі нелінійного параболічного рівняння;

– проведено порівняльний аналіз отриманих оцінок з існуючими оцінками розв'язків лінійних та напівлінійних рівнянь.

Всі основні результати дисертації наведені з повними і строгими математичними доведеннями. Робота має теоретичний характер та все ж отримані результати можуть бути застосовані при вивченні сильно нестаціонарних фізичних процесів, для яких характерне явище локалізації тепла, магнітного поля та інших величин на визначених ділянках середи. Також важливим аспектом є метод, за допомогою якого проведено дослідження. Метод енергетичних оцінок може застосовуватись при вивченні нелінійних рівнянь у частинних похідних другого та високих порядків у багатомірних областях з сингулярними граничними даними, а також при вивченні великих розв'язків параболічних рівнянь з абсорбцією та логістичних рівнянь.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Євгеньєва Є.О. Квазілінійні параболічні рівняння з виродженим потенціалом абсорбції. *Український математичний вісник.* 2018. Т. 15, № 4. С. 576–591.

2. Yevgenieva Ye.A. Propagation of singularities for large solutions of quasilinear parabolic equations. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.* 2019. Vol. 15, № 1. P. 131–144.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, Impact Factor: 0.531)

3. Євгеньєва Є.О., Шишков А.Є. Метод енергетичних оцінок для дослідження поведінки слабких розв'язків рівняння повільної дифузії із сингулярними

граничними даними. *Український математичний вісник.* 2019. Т. 16, № 2. С. 277–288.

Особистий внесок здобувача. Автору належать Теорема 1.1, Наслідок 2.1.

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

4. Yevgenieva Ye.A. Limiting profile of solutions of quasilinear parabolic equations with flat peaking. *Journal of Mathematical Sciences.* 2018. Vol. 234, № 1. P. 106–116.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar)

5. Shishkov A.E., Yevgenieva Ye.A. Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations. *Mathematische Nachrichten.* 2019. Vol. 292, № 6. P. 1349–1374.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar, Science Citation Index Expanded, Impact Factor: 0.847)

   Особистий внесок здобувача. Автору належать Theorem 1.2, Theorem 1.3, Corollary 1.4, Lemma 2.3, Lemma 5.2, Example 5.3, Example 5.4.

Наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Yevgenieva Ye. Boundary regimes with singular peaking for quasilinear parabolic equations. *International Conference on Differential Equations* : materials of the International Conference Dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv, 2016. P. 120.

7. Yevgenieva Ye. Boundary regimes with singular peaking for quasilinear parabolic equations. *5th International conference for young scientists on Differential equations and Applications, dedicated to Yaroslav Lopatynsky* : materials of the 5th International conference for young scientists, dedicated to Yaroslav Lopatynsky, November 9–11, 2016, Kyiv, 2016. P. 151–152.

8. Evgenieva E. Boundary LS-Regimes for Quasilinear Parabolic Equations. *Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (DEMPHA)* : матеріали Міжнародної наукової конференції, 17–19 жовтня 2017 р., Черкаси, 2017. С. 60–61.

9. Yevgenieva Ye. Weak solutions of quasilinear parabolic equations with blow-up boundary regime. *Міжнародна літня математична школа пам'яті В.А. Плотнікова* : матеріали конференції, 11–16 червня 2018 р., м. Одеса. 2018. С. 36.

10. Yevgenieva Ye. Large solutions of quasilinear parabolic equations with absorption potential. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях* : матеріали Міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17—19 вересня 2018 р.,Чернівці, 2018. С. 41.

11. Yevgenieva Ye. Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations. *Нелінійні проблеми аналізу* : тези доповідей VI Всеукраїнської математичної конференції імені Б.В. Василишина, 26–28 вересня 2018 р., Івано-Франківськ – Микуличин, 2018. С. 89.

12. Yevgenieva Ye. Large solutions of quasilinear parabolic equations of diffusion - nonlinear degenerate absorption type. *Contemporary Analysis and Nonlinear Boundary Problems* : materials of the workshop dedicated to the 80th anniversary of B.V. Bazaliy and to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, October 17–18, 2018, Sloviansk, 2018. P. 14.

13. Yevgenieva Ye.A. Limiting profile of solutions for quasilinear parabolic equations with singular boundary data. *International Conference of Young Mathematicians*: Book of Abstracts, June 6—8, 2019, Kyiv, 2019. P. 45.

14. Yevgenieva Ye.A. Propagation of singularities for solutions of quasilinear parabolic equations with absorption term. *Geometry, Differential Equations and Analysis*: Book of Abstracts of International Conference dedicated to the 100th anniversary of A.V. Pogorelov, June 17–21, 2019, Kharkiv, 2019. P. 57–58.

15. Yevgenieva Ye.A. Boundary values with singular peaking for quasilinear heat equations. *6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications* : Book of Abstracts, June 18–20, 2019, Vinnytsia, 2019. P. 80–81.

16. Євгеньєва Є.О. Великі розв'язки квазілінійних параболічних рівнянь. *Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV* : матеріали Міжнародної конференції, присвяченої 100-річчю з дня народження В.К. Дзядика, 20–26 червня 2019 р., с. Світязь, Волинь, 2019. С. 76.

АНОТАЦІЯ

Євгеньєва Є.О. Граничні режими із сингулярним загостренням у квазілінійних параболічних рівняннях. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Міністерство освіти і науки України, Харків, 2019.

Дисертаційна робота присвячена вивченню квазілінійних параболічних рівнянь з сингулярними граничними даними, що загострюються за скінчений проміжок часу. Досліджується випадок, коли сингулярний ріст розв'язку не виходить за межі границі. Отримано точні верхні оцінки слабких розв'язків таких задач, вивчено залежність поведінки розв'язку біля границі від характеру загострення граничної функції.

Отримані результати дозволили дослідити квазілінійні параболічні рівняння з виродженим потенціалом абсорбції. Для таких рівнянь отримано оцінки слабких розв'язків, вивчено залежність поведінки цих розв'язків від характеру виродження потенціалу абсорбції. Результати справедливі для всіх слабких розв'язків незалежно від початкових та крайових умов, тому можуть бути застосовані для великих розв'язків (якщо вони існують), тобто, для розв'язків, що приймають нескінчені значення на всій параболічній границі області.

Під час дослідження було розвинуто метод енергетичних оцінок для визначення поведінки розв'язків розглянутих задач.

Ключові слова: квазілінійне параболічне рівняння, слабкий розв'язок, граничний режим із сингулярним загостренням, енергетична функція, вироджений потенціал абсорбції, великий розв'язок.

АННОТАЦИЯ

Евгеньева Е.А. Граничные режимы с сингулярным обострением в квазилинейных параболических уравнениях. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Министерство образования и науки Украины, Харьков, 2019.

Диссертация посвящена изучению квазилинейных параболических уравнений с сингулярно обостряющимися граничными данными. Впервые такие задачи стали изучать в 1960х годах в качестве математической модели процесса управляемого

термоядерного синтеза. Был обнаружен эффект пространственной локализации сингулярных граничных режимов, а именно, было доказано, что при определенных условиях на характер обострения сингулярный рост решения не проникает глубоко внутрь области определения задачи. При этом около границы области формируется так называемая зона сингулярности (blow-up set). В 20 веке с применением разных вариантов барьерной техники активно изучались условия локализации граничных режимов с обострением. В этом направлении было получено множество результатов для линейных и полулинейных параболических уравнений.

В 1999 году в работе А.Е. Шишкова и А.Г. Щелкова был предложен новый метод для изучения локализованных граничных режимов. Разработанный подход использует принципы метода Сен-Венена и локальных энергетических оценок и называется метод энергетических оценок. Позже В.А. Галактионов и А.Е. Шишков в серии работ 2003–2006 годов развили этот метод для определения условий локализации для широкого класса дважды нелинейных параболических уравнений второго и высокого порядков.

Несмотря на это, поведение решений дважды нелинейных параболических уравнений с сингулярным граничным режимом около зоны сингулярности оставалось неизученным. Достаточно информативные результаты в этом направлении могут быть получены в случае, когда зона сингулярности решения не выходит за пределы границы области определения задачи. При таком условии на граничный режим было изучено поведение слабых решений указанной задачи. В диссертации получены энергетические оценки сверху слабых решений около границы области при приближении ко времени обострения для разных типов дважды нелинейных параболических уравнений с сингулярными граничными данными из разных классов. При этом изучена также зависимость поведения решений от характера обострения граничного режима.

Все результаты получены методом энергетических оценок, который был усовершенствован для исследования описанной задачи. Метод энергетическх оценок является альтернативным подходом для изучения эффекта пространственной локализации обостряющихся граничных режимов. В отличии от барьерной техники, которая использует теоремы сравнения с автомодельными решениями, метод энергетических оценок не требует автомодельности, а состоит в эффективной оценке перетоков энергии, связанной с решением, в бесконечном семействе временных полос, накапливающихся около времени обострения. Благодаря такому подходу метод позволяет изучать достаточно широкий класс параболических уравнений второго и высоких порядков, является более универсальным и не требует дополнительных приемов для задач, не допускающих автомодельности.

В качестве приложения полученных результатов было изучено квазилинейное параболическое уравнение с нелинейным абсорбционным членом. Последние десятилетия активно изучаются вопросы существования и свойства больших решений таких уравнений, то есть таких, которые принимают бесконечные значения на параболической границе области. При этом в зависимости от поведения и характера вырождения потенциала абсорбции решение становится ограниченным во внутренней подобласти при приближении к конечному времени. В работе Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik в 2012 году было доказано существование больших решений линейного уравнения с абсорбцией и получены условия на потенциал абсорбции, при которых большие решения становятся ограниченными всюду внутри области определения задачи в конечный момент времени. Более точные условия были получены для линейных и полулинейных уравнений в работе А.Е. Шишкова в 2016 году. Однако оставался открытым вопрос поведения решений в конечный момент времени для дважды нелинейных параболических уравнений с абсорбцией.

В диссертации рассматриваются условия на характер вырождения потенциала абсорбции, которые гарантируют ограниченность решения в конечный момент времени в любой внутренней подобласти области определения задачи. При таких условиях найдено оценки сверху для всех слабых решений дважды нелинейных параболических уравнений. Также изучено зависимость поведения решений от характера вырождения потенциала абсорбции, рассмотрены разные типы указанных уравнений и разные классы абсорбционных потенциалов. Следует отметить, что результаты получено для всех слабых решений независимо от начальных и граничных условий, а значит при условии, что большие решения существуют, все результаты справедливы и для них.

Ключевые слова: квазилинейное параболическое уравнение, слабое решение, граничный режим с сингулярным обострением, энергетическая функция, вырожденный потенциал абсорбции, большое решение.

ABSTRACT

Yevgeniia A. Yevgenieva. Boundary regimes with singular peaking for quasilinear parabolic equations. — Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.02 Differential equations. —- V.N. Karazin Kharkiv National University, the Ministry of Education and Scirnce of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The thesis is devoted to studying of quasilinear parabolic equations with singular boundary data which aggravates at the finite time. The case when the singular growth of a solution doesn't leave the boundary of the domain is investigated. The precise upper estimates for weak solutions of such problems have been obtained, the way how the behavior of a solution near to the boundary depends on the character of peaking of boundary function is studied.

Obtained results allowed to investigate the quasilinear parabolic equations with degenerated absorption potential. For such equation estimates of weak solutions were obtained, the way how the behavior of solutions depends on the character of degeneration of absorption potential was studied. The results hold for all weak solutions regardless the initial and boundary data, therefore they can be applied for large solutions (if they exist), namely, for the solutions which are infinite on the whole parabolic boundary of the domain.

During the investigation the method of energy estimates was developed to determine the behavior of solutions of the mentioned problems.

Keywords: quasilinear parabolic equation, weak solution, boundary regime with singular peaking, energy function, degenerate absorption potential, large solution.

Підписано до друку з авторського оригінал-макету 28.10.2019 р.
Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 0,9. Наклад 100 прим. Зам.№ 1521.

Видавництво Б.І. Маторіна
84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел.: +38 050 518 88 99. E-mail: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.